

Generalmente para 0-cupones, $Vr < 0$.
 Entonces, si $\psi > 0$, $\Delta < 0 \Rightarrow dT < r$ si
 $\psi = 0$, $\Delta = 0$ y $dT = r$ (no hay premio al cuerpo).
 si $\psi < 0$, $\Delta > 0$ y $dT > r$

Para cualquier activo F^i

$$(13') \quad 0 = \frac{1}{2} \sigma^2 F_{rr} r^2 + [h - \psi] F_r - r F + F_t$$

Un Modelo Especial

Cox, Ingersoll y Ross (1985).

$$h(r, t) = K(\theta - r) \text{ y}$$

$$\sigma(r, t) = \sigma \sqrt{r}$$

donde K , θ y σ son constantes.

$$(14) \quad dr = K(\theta - r)dt + \sigma \sqrt{r} dz$$

Se espera que $\theta > 0$ y $K \geq 0$. Pero $K > 0$,
 $E(dr) = K(\theta - r)$ que es positivo si
 $r < \theta$, 0 si $\theta = r$ y negativo si $r > \theta$.
 $\Rightarrow r$ tiene reverción a la media, o tiene
 una tendencia hacia la tasa de largo
 plazo θ . La fuerza o la velocidad de la
 reverción está dada por K . Si $K = 0 \Rightarrow$
 $r = 0$ siempre. Si $K = 0, \Rightarrow E(dr) = 0$

Se puede mostrar que:

$$(15) E[\pi(s)/\pi(t)=\pi] = \pi e^{-K(s-t)} + \sigma(1 - e^{-K(s-t)})$$

Es un promedio ponderado de π y σ .
 Si K sube o s sube \Rightarrow mayor el peso por σ .

La varianza de $d\pi$ es $\sigma^2 \pi$, creciente con π .
 Sin embargo $E\left(\frac{d\pi}{\pi}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\pi}$ es decreciente en π .

La $A(\pi(s), s; \pi(t), t)$ es la densidad por π en s .
 con $\pi(t) = \pi \Rightarrow$

$$A = c e^{-(\mu+\nu)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{q/2} I_q[2(\mu\nu)^{1/2}]$$

$\begin{cases} \text{shi-cuadrado} \\ \text{no central} \end{cases}$

donde

$$c \equiv \frac{2K}{\sigma^2 [1 - e^{-K(s-t)}]}$$

$$\mu \equiv c(s-t)\pi e^{-K(s-t)}$$

$$\nu \equiv c(s-t)\pi(s)$$

$$q \equiv \frac{2K\sigma}{\sigma^2} - 1$$

$I_q[\] \equiv$ función Bessel modificada del primer tipo de orden q .

Para $K > 0$, $r(t)$ tiene una distribución steady-state independientemente de λ , es decir, $\lambda \rightarrow 0$

$$(20) \quad f(r(\infty)) = \frac{\omega^\nu}{\Gamma(\nu)} r^{\nu-1} e^{-\omega r} \quad \{ \text{Gamma} \}$$

$$\omega \equiv \frac{2K}{\sigma^2} \quad ; \quad \nu \equiv \frac{2K\theta}{\sigma^2}$$

$$(21) \quad E[r(\infty)] = \theta$$

$$(22) \quad \text{Var}[r(\infty)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2K}$$

Caso especial para el primer tiempo.

$$(23) \quad \psi = \psi^z = \psi \sigma^2 r \\ = -\lambda r$$

[Notar que λ aquí es $-\lambda$ de CIR.]

\Rightarrow

$$(24) \quad \frac{1}{2} \sigma^2 r P_{rr} + [K(\theta - r) + \lambda r] P_r + P_t - \eta P = 0$$

θ'

$$(24') \quad \frac{1}{2} \sigma^2 r P_{rr} + K'(\theta' - r) P_r + P_t - \eta P = 0$$

$$K' \equiv K - \lambda$$

$$\theta' \equiv \frac{K\theta}{K - \lambda}$$

$$(26) \quad \sigma^T = -B(t, T) \sigma \pi^{1/2} < 0$$

$$\frac{\partial |\sigma^T|}{\partial B} > 0$$

$$(27) \quad d^T = \pi + \lambda B(t, T) \pi = [1 + \lambda B(t, T)] \pi$$

$$(28) \quad \frac{dV}{V} = \pi [1 + \lambda B(t, T)] dt - B(t, T) \sigma \pi^{1/2} dz$$

Static comparative:

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} < 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} > 0; \quad \frac{\partial V}{\partial z} < 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} < 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} > 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} < 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} < 0$$

$$\pi > 0, \quad \frac{\partial V}{\partial K} > 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} < 0$$

$$\pi < 0, \quad \frac{\partial V}{\partial K} < 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} > 0$$

Here a flip

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial (\sigma^2)^2} < 0$$

2e Entropie temporel.

$$R(\eta, t; T) = R(\eta, z)$$

$$(29) \quad R(\eta, z) = -\frac{1}{z} \log [V(\eta, t; T)]$$

$$\text{i.e.} \quad V(\eta, t, T) = 1 \cdot e^{-z \cdot R(\eta, z)}$$

$$R(\eta, z) = \frac{1}{z} [\eta B(z) - \log [A(t; z)]]$$

$$(30a) \quad \lim_{z \rightarrow 0} R(\eta, z) = R(\eta, 0) = \eta$$

$$(30b) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R(\eta, z) = R(\eta, \infty) = \frac{z K \theta}{K + K'} \leq \theta'$$

$$R(\eta, \infty) \geq \theta \Leftrightarrow \eta \geq \left[\left(\frac{K}{z} \right)^2 + \theta^2 \right]^{1/2} \frac{-15}{2}$$

Entropie Comportement.

$$\text{Excepto para } x = z \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{z} \frac{\partial V / \partial x}{V}$$

\Rightarrow

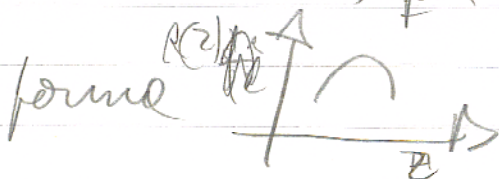
$$\frac{\partial R}{\partial \eta} = -\frac{1}{z} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \eta} > 0 ; \quad \frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{1}{z} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{V} > 0$$

etc...

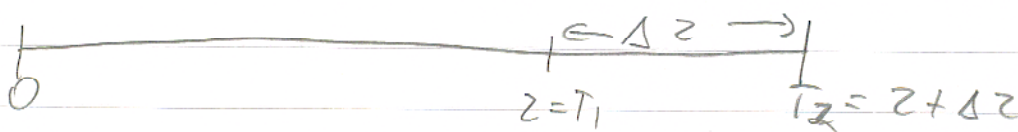
$$\text{si } r < R(r, 0) \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} > 0$$

$$r > \frac{K\theta}{K'} = \frac{K'\theta'}{K'} = \theta' \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} < 0$$

CIR contiene que entre medio tiene esta



Contratos forward y time forward



Dado $\{P(r, 0; T), r_0 = r\}$, qué precio, acordado hoy, entre el dueño a pagar un inversionista en T_1 por un 0-cupón que vence en T_2 . Es este precio

$$T_1 P(r, 0; T_2 - T_1) = T_1 P(T_2 - T_1)$$

Supongamos que yo ~~debo~~ debo entregar el bono en T_1 . Puedo comprar el bono con venc. en T_2 hoy por $P(r, 0; T_2)T_1$ en T_1 recibo $\$T_1 P(r, 0; T_2 - T_1)$ con certeza. Alternativamente, puedo recibir $T_1 P(r, 0; T_2 - T_1)$

convert. en T_1 comprando dicha cantidad
de bonos con venc. en T_1 .

\Rightarrow

$$P(r, 0; T_2) = T_1 P(T_2 - T_1) P(r, 0; T_1)$$

$$(31) \quad T_1 P(T_2 - T_1) = \frac{P(r, 0; T_2)}{P(r, 0; T_1)}$$

Todos los precios forward pueden ser
det. en función de precios spot.

Sea $T_1 R(T_2 - T_1)$ el retorno al vencimiento
sobre el precio forward.

$$e^{-T_1 R(T_2 - T_1) \cdot [T_2 - T_1]} = T_1 P(T_2 - T_1)$$

$$(32) \quad T_1 R(T_2 - T_1) = \frac{-1}{T_2 - T_1} \log [T_1 P(T_2 - T_1)]$$

$$= \frac{-1}{T_2 - T_1} [\log P(r, 0; T_2) - \log P(r, 0; T_1)]$$

$$= \frac{-1}{T_2 - T_1} [-T_2 R(r, T_2) + T_1 R(r, T_1)]$$

Cuando $T_2 - T_1 = \Delta t$

$$z R(\Delta z) = \frac{-1}{\Delta z} \left[\log P(\gamma, 0; z + \Delta z) - \log P(\gamma, 0; z) \right]$$

(34)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} z R(\Delta z) = -\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Ahora,

$$E(\gamma(t) | \gamma(0) = \gamma) = \gamma e^{-Kt} + \int_0^t \theta (1 - e^{-K(t-s)}) ds$$

De (34) y $A(t; \Gamma)$

$$z \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(z) = \frac{\partial B}{\partial z} \gamma + K \int_0^z \theta \frac{\partial B}{\partial z}(z-s) ds$$

Comparando

$$\hat{\Gamma}(z) \neq E[\gamma(z) | \gamma(0) = \gamma]$$

excepto si $\frac{\partial B}{\partial z} = e^{-Kz}$

pero $\frac{\partial B}{\partial z} = e^{-Kz} \Leftrightarrow \nabla^2 = 0$.

\Rightarrow En general aún si $\gamma = 0$, la longitud esperada es \neq de la longitud forward.

Un bono general y Hurwicz

$$(35) \quad B(r, t) = \int_0^T c(t) P(r, 0; t) dt + M P(r, 0; T) \\ = \int_0^T c(t) e^{-r^* t} dt + M e^{-r^* T}$$

donde r^* es el retorno al venc.

Definiciones de Hurwicz:

$$(36) \quad D_1 \equiv \int_0^T t \xi_1(t) dt + \bar{\xi}_1(T) \cdot T$$

$$\xi_1(t) \equiv \frac{c(t) P(r, 0; t)}{B(r, T)} ; \quad \bar{\xi}_1(T) \equiv \frac{M P(r, 0; T)}{B(r, T)}$$

$$(37) \quad D_2 \equiv \int_0^T t \xi_2(t) dt + \bar{\xi}_2(T) \cdot T$$

$$\xi_2(t) \equiv \frac{c(t) e^{-r^* t}}{B(r, T)} ; \quad \bar{\xi}_2(T) \equiv \frac{M e^{-r^* T}}{B(r, T)}$$

De (35)

$$\frac{\partial B}{\partial r^*} = \int_0^T -t c(t) e^{-r^* t} dt - T M e^{-r^* T} \\ = -B \left[\int_0^T \frac{t c(t) \cdot e^{-r^* t}}{B} dt + T \frac{M e^{-r^* T}}{B} \right] \\ = -B D_2$$

$$o' \quad \frac{\partial V}{\partial n^*} = -V_z$$

la derivación se impone sobre la simultaneidad de V ante cambios en t .

CIR (1979) $\frac{dV}{V}$ se es proporcional a V_z

\Rightarrow la estructura temporal es plana e igual a n^*

$\frac{dV}{V}$ se es proporcional a $V_z \Leftrightarrow$

los Δ en la curva son paralelos

$$\frac{\partial \lambda(n, z)}{\partial n} = 1$$

- Otra Medida

$$(39) \quad \frac{dF_i}{F_i} = \alpha^i dt + \frac{F_i^n}{F_i} g dz$$

Para un 0-cupon

$$(40) \quad \frac{dV}{V} = \alpha^z dt + \frac{V^n(n, z)}{V} g dz$$

D_3 se define como = el vencimiento de un 0-cupón con el mismo valor de cupiente, i.e.:

$$\left| \frac{P_3}{P} \right| = \left| \frac{B_3}{B} \right| \Rightarrow B(F(D_3)) = \left| \frac{B_3}{B} \right|$$

$$(42) \quad F^{-1}\left(\frac{B_3}{B}\right) = D_3 = \frac{Z}{R} \coth^{-1} \left[\frac{\frac{Z}{R} - K'}{\frac{Z}{R} \left| \frac{B_3}{B} \right|} \right]$$

Opción Call sobre un 0-cupón

Sea $C(r, t; T, Z, E)$ el valor en t de una call para un bono con venc en Z , con precio de ejercicio E y expiración T [$Z \geq T \geq t$].

En $t = T$

$$(43) \quad C(r, T; T, Z, E) = \max[0, P(r, T; Z) - E]$$

En general C es estrictamente (13') s.e (43)

En el caso en que (14) / (23) son ciertos \Rightarrow

$$(44) \quad \frac{1}{2} \sigma^2 r (C_{rr} + K'(\theta' - r) C_r) + (C_t - rC) = 0$$

La solución de (44) es

$$(46) \quad C(n, t; T, z, E) =$$

$$P(n, t; z) \chi^2 \left(2n^* [\phi + \psi + B(T, z)]; \frac{4K\sigma}{\sigma^2}, \right.$$

$$\left. \frac{2\phi^2 n e^{\rho(T-t)}}{\phi + \psi + B(T, z)} \right)$$

$$- E P(n, t; T) \chi^2 \left(2n^* [\phi + \psi]; \frac{4K\sigma}{\sigma^2}, \frac{2\phi^2 n e^{\rho(T-t)}}{\phi + \psi} \right)$$

Donde $\chi^2(g; d, e, z)$ es la distribución acumulada chi-cuadrado de g con el g.l y parámetros de no-centr. e, z .

$$\psi = \frac{K' + K}{\sigma^2}$$

$$\phi = \frac{2K}{\sigma^2 (e^{\rho(T-t)} - 1)}$$

$$n^* = \left[\log \left(\frac{A(T, z)}{E} \right) \right] / B(T, z)$$

n^* es tal que $E = P(n^*, T, z)$. i.e. $n < n^*$ la opción se ejerce

(46) es también la solución para opciones americanas.

$$\frac{\partial C}{\partial T} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial C}{\partial n} < 0. \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial n^2} > 0.$$

A. Brown - Nelson

Particionemos los estados en t por $\pi(t) = \hat{\pi}$.
 Sea $\Pi(\pi, t; \hat{\pi}, T)$ el precio de un
 activo en t cuando $\pi(t) = \pi$, que paga
 \$1 en T si $\pi(T) = \hat{\pi}$ y \$0 en todos los
 demás estados.

$\Rightarrow \Pi$ debe satisfacer (13') s.e.

$$(48) \quad \Pi(\pi, T; \hat{\pi}, T) = \delta(\pi - \hat{\pi})$$

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 & x \neq 0 \\ \delta(0) &= \infty & \text{y} \quad \int_0^b \delta(x) dx = 1 \text{ para } b > 0 > a. \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} (49) \quad C(\pi, t; T, z, E) &= \int_0^\infty \Pi(\pi, t; \hat{\pi}, T) C(\hat{\pi}, T; T, z, E) d\hat{\pi} \\ &= \int_0^{\pi^*} \Pi(\pi, t; \hat{\pi}, T) [P(\hat{\pi}, T, z) - E] d\hat{\pi} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \pi^{*2}} = -V(T, z) \frac{\partial C}{\partial \pi^*} + V(T, z) E(\pi^*, T, z) \Pi(\pi, t; \hat{\pi}, T)$$

donde

$$E(\pi^*, T, z) \equiv A(T, z) \exp[-V(T, z) \pi^*]$$

derivando:

$$(50) \quad \Pi(r, t; r^*, T) = \frac{1}{E(r^*, T, z)} \left[\frac{1}{B(T, z)} \frac{\partial^2 C}{\partial r^{2*}} + \frac{\partial C}{\partial r^*} \right]$$



Los modelos anteriores son unidimensionales puesto que hay una sola fuente de incertidumbre o variación en r .

Existen modelos multidimensionales:

$$\text{Ej: (1)} \quad dr = \kappa(\theta - r) + \sigma r^{\gamma} z dz$$

$$d\theta = v(r - \theta) dt$$

$$(2) \quad d\theta = v(r - \theta) dt + u\theta^{\gamma/2} dz_0$$

$$dz_0 dz = 0.$$